

INTRODUZIONE

La risposta in frequenza è la TDF delle funzioni di trasferimento e rappresenta un altro dei metodi di studio del segnale di uscita dei sistemi LTI oltre a:

- Convolutione discreta $y[n] = h[n] * x[n]$
- RISPOSTA IMPULSIVA
- EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE FINITE
- FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Studio degli effetti su di un segnale in ingresso da parte di un sistema LTI

QUANDO SI USA

È conveniente utilizzare la risposta in frequenza quando il segnale in ingresso è un segnale di durata infinita come ad esempio $x[n] = \cos(2\pi F_0 n + \phi)$ [no inizio - no fine] da non confondere con il segnale $x[n] = \cos(2\pi F_0 n + \phi)u[n]$ che ha un inizio ma non una fine. In questo caso la risposta in frequenza non è consigliata. Inoltre questo tipo di analisi si è indispensabile per lo studio dei filtri.

SEGNALI TONALI

Sono segnali complessi esprimibili nella forma

$$x[n] = e^{j2\pi F_0 n}$$

al posto del tempo si usa la posizione del campione
frequenza del segnale

si parla di segnali ma in pratica sono sequenze.

Tutti i segnali sinusoidali sono considerati segnali tonali infatti:

$$\sin(2\pi F_0 n) = \frac{e^{j2\pi F_0 n} - e^{-j2\pi F_0 n}}{2j} = \frac{1}{2j} (e^{j2\pi F_0 n} - e^{-j2\pi F_0 n})$$

I segnali possono avere una loro fase iniziale

DEFINIZIONE $H(F)$

Dato un sistema LTI con una sua risposta impulsiva $h[n]$ come questo agisce su un segnale tonale in ingresso?

Si considera lineare in quanto si tratta di un sistema LTI

$$y[n] = h[n] * x[n] = h[n] * e^{j2\pi F_0 n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j2\pi F_0 (n-k)} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j2\pi F_0 n} e^{-j2\pi F_0 k} = e^{j2\pi F_0 n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j2\pi F_0 k} =$$

$$= e^{j2\pi F_0 n} H(F_0)$$

Risposta in Frequenza $H(F)$ a $F=F_0$

PROPRIETA' $H(F)$
CASO REALE

$$H(F) = H(-F) \quad \text{MODULO}$$

$$\angle H(F) = -\angle H(-F) \quad \text{FASE}$$

quando il modulo è costante e la fase è lineare allora LTI è non distortore.

EFFETTI DI $H(F)$

$$y[n] = e^{j2\pi F_0 n} H(F_0) = e^{j2\pi F_0 n} |H(F_0)| e^{j\angle H(F_0)}$$

è un segnale complesso

MODULO

FASE DELLA RISP. IMPULSIVA

$$= |H(F_0)| e^{j[2\pi F_0 n + \angle H(F_0)]}$$

FASE DEL SEGNALE DI USCITA

SFASAMENTO

La risposta in frequenza mostra che un sistema LTI altera sia l'ampiezza che la fase, e la fase viene alterata in modo lineare.

PERCHE' si usa $H(F)$

Dato in ingresso una sequenza complessa posso rappresentare con la sua TDF:

La giustificazione si ha nel fatto che nei filtri quando $H(F)=0$ l'uscita è nulla nonostante non sia nullo il singolo contributo in ingresso. In pratica si può trovare una sequenza della risposta impulsiva t.e. $H(F)=0$ per specifici valori di F .

$$x[n] = \int_{-0.5}^{0.5} X(F) e^{j2\pi F n} dF$$

per la risposta del sistema

$$y[n] = \int_{-0.5}^{0.5} H(F) X(F) e^{j2\pi F n} dF$$

singolo contributo in ingresso

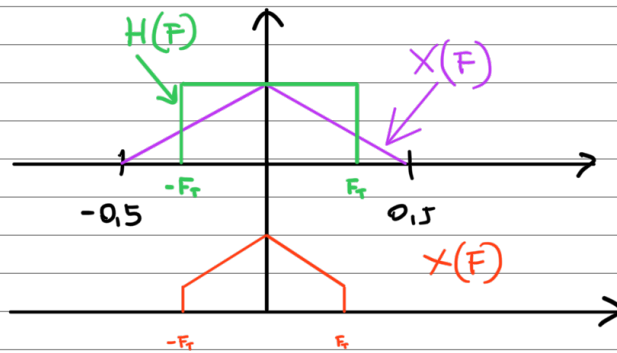
COSA RAPPRESENTANO GLI

Da notare che l'argomento dell'integrale rappresenta un singolo contributo di una specifica sequenza complessa $e^{j2\pi F n}$ di frequenza F , in ingresso, di ampiezza $X(F)dF$ mentre in uscita di ampiezza $H(F)X(F)dF$. In pratica gli integrali possono essere considerati sommatorie e il loro risultato combinazioni lineari

CONCLUSIONI Applicando all'ingresso di un sistema LTI una sequenza complessa ottengo in uscita una sequenza complessa con la stessa frequenza e che viene alterata in ampiezza e fase

SIGNIFICATO GRAFICO

Da notare che i grafici di fianco sono periodici.



Per la definizione di $X(F)$ questo può essere considerato come la somma del segnale tonele $e^{-j2\pi F n}$ di ampiezza $x[n]$.

In modo analogo $H(F)$ è la TDF della risposta impulsiva intesa come sommatoria del segnale tonele $e^{-j2\pi F n}$ di ampiezza $h[n]$.

L'uscita del sistema LTI è la sommatoria del segnale tonele $e^{-j2\pi F n}$ di ampiezza pari alla TDF della convoluzione discreta.

In pratica applico una sequenza in ingresso ad un filtro IR l'uscita è limitata in frequenza in funzione della risposta impulsiva $h[n]$. Come si vede l'uso delle TDF è indispensabile per lo studio del sistema LTI.

Questions / Note	Scope	Esercizio	Page
TESTO		Determinare l'uscita del filtro con $h[n]$ reale	
SEGNALE INGRESSO		$x[n] = A \cos(2\pi F_0 n + \varphi)$ $x[n] = \frac{A}{2} \left[e^{j(2\pi F_0 n + \varphi)} + e^{-j(2\pi F_0 n + \varphi)} \right] =$ $= \frac{A}{2} \left[e^{j2\pi F_0 n} e^{j\varphi} + e^{-j2\pi F_0 n} e^{-j\varphi} \right] =$ $= \frac{A}{2} e^{j2\pi F_0 n} e^{j\varphi} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi F_0 n} e^{-j\varphi}$	
USCITA		$y[n] = \frac{A}{2} e^{j2\pi F_0 n} e^{j\varphi} H(F_0) + \frac{A}{2} e^{-j2\pi F_0 n} e^{-j\varphi} H(-F_0) =$ $= \frac{A}{2} e^{j2\pi F_0 n} e^{j\varphi} \underbrace{ H(F_0) }_{\text{effetto di } h[n] \text{ Reale, sono uguali}} e^{j\angle H(F_0)} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi F_0 n} e^{-j\varphi} \underbrace{ H(-F_0) }_{\text{effetto di } h[n] \text{ Reale, sono uguali}} e^{-j\angle H(-F_0)} =$ $= \frac{A}{2} H(F_0) \left(e^{j2\pi F_0 n} e^{j\varphi} e^{j\angle H(F_0)} + e^{-j2\pi F_0 n} e^{-j\varphi} e^{-j\angle H(-F_0)} \right) =$ $= \frac{A}{2} H(F_0) e^{j\varphi} e^{j(2\pi F_0 n + \angle H(F_0))} + \frac{A}{2} H(F_0) e^{-j\varphi} e^{-j(2\pi F_0 n + \angle H(F_0))}$ $= \frac{A}{2} H(F_0) \left[e^{j(2\pi F_0 n + \varphi + \angle H(F_0))} + e^{-j(2\pi F_0 n + \varphi + \angle H(F_0))} \right] =$	
Componenti $y[n]$		$= \underbrace{A H(F_0) }_{\text{altera l'ampiezza}} \cos \left(\underbrace{2\pi F_0 n}_{\text{il segnale in uscita ha la stessa frequenza di quello in ingresso}} + \underbrace{\varphi + \angle H(F_0)}_{\text{SFASAMENTO}} \right)$	

FUNZIONE DI TRASF.

$$H(z) = z^{-n_0} \quad \text{è la funzione di trasferimento di un sistema Riferitore}$$

RISPOSTA IN FREQ.

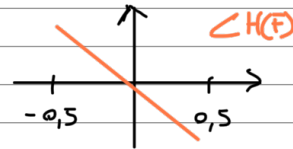
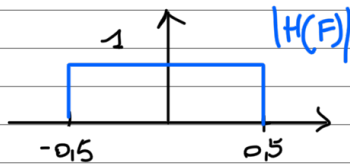
$$H(F) = H(z) \Big|_{z=e^{j2\pi F}} = e^{-j2\pi F n_0}$$

dalle def. di TD?

PROPRIETÀ LTI

$$\left. \begin{aligned} |H(F)| &= 1 \Rightarrow \cos(2\pi F n_0) \\ \angle H(F) &= 2\pi F n_0 \Rightarrow \text{Quadrante} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{SISTEMA NON DISTORCENTE}$$

STUDIO GRAFICO

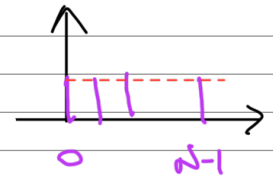


TESTO

Sia $h[n]$ la risposta impulsiva di un sistema FIR. Studiare la risposta in frequenza.

RISPOSTA $h[n]$

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} & \{0, \dots, N-1\} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

CALCOLO $H(F)$

$$H(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j2\pi F n} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{-j2\pi F n} =$$

non avendo altro uso
la definizione di TOF

serie geometrica
truncata

$$= \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j2\pi F N}}{1 - e^{-j2\pi F}} =$$

Applico Eulero

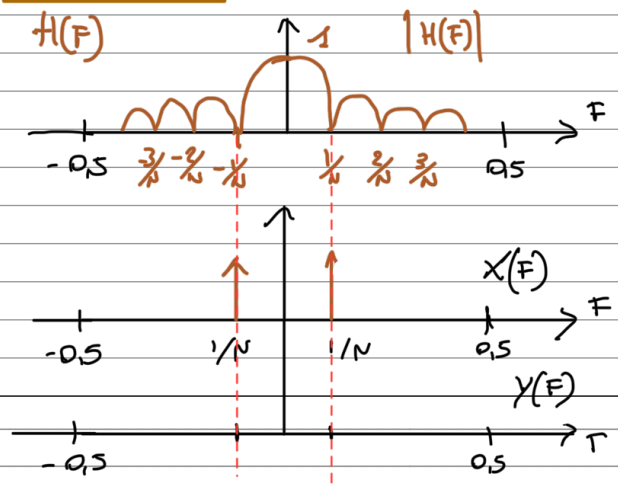
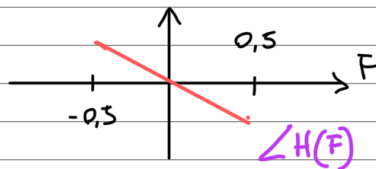
$$= \frac{1}{N} \frac{e^{-j\pi F N} (e^{j\pi F N} - e^{-j\pi F N})}{e^{-j\pi F} (e^{j\pi F} - e^{-j\pi F})} =$$

$$= \frac{1}{N} \frac{e^{-j\pi F N}}{e^{-j\pi F}} \frac{e^{j\pi F N} - e^{-j\pi F N}}{e^{j\pi F} - e^{-j\pi F}} =$$

$$= \frac{1}{N} \frac{e^{-j\pi F N}}{e^{-j\pi F}} \frac{\sin(\pi F N)}{\sin(\pi F)} =$$

$$= \frac{1}{N} \underbrace{e^{-j\pi F N} \cdot e^{j\pi F}}_{e^{j\pi F(-N+1)} \cdot e^{-j\pi(N-1)}} \boxed{\frac{\sin(\pi F N)}{\sin(\pi F)}} =$$

assomiglia a un
sine



SCOPO

È un metodo per poter esprimere il ritardo del segnale di uscita rispetto all'ingresso permettendo un più facile confronto tra due sistemi LTI

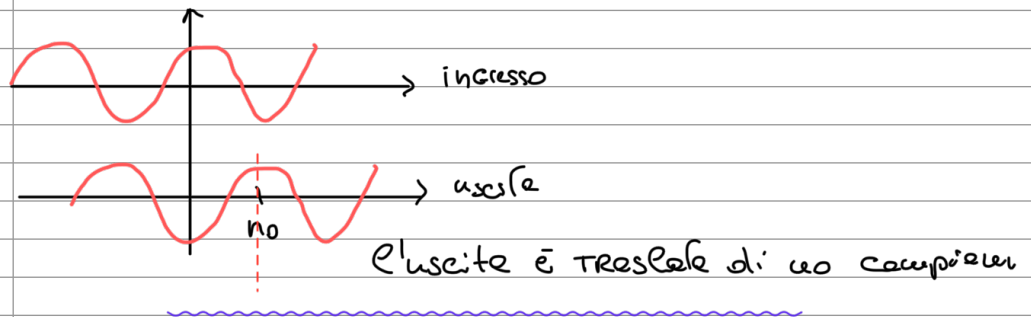
DEFINIZIONE

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram: } x[n] \rightarrow \boxed{H(F)} \rightarrow y[n] \\
 & y[n] = H(F) e^{j2\pi F n} = |H(F)| e^{j\angle H(F)} e^{j2\pi F n} = \\
 & x[n] = e^{j2\pi F n} \quad = |H(F)| e^{j[2\pi F n + \angle H(F)]} = \\
 & = |H(F)| e^{j\left[2\pi F \left(n + \frac{\angle H(F)}{2\pi F}\right)\right]} = \\
 & \quad \quad \quad \uparrow \text{RITARDO DI FASE} \\
 & \quad \quad \quad \downarrow \text{TRASLATIONE TEMP.} \\
 & = |H(F)| e^{j[2\pi F (n - n_0)]} \\
 & \quad \quad \quad \uparrow n_0 = \tau(F) = - \frac{\angle H(F)}{2\pi F}
 \end{aligned}$$

SIGNIFICATO

L'indice n_0 indica il numero di campioni di ritardo ed è indipendente dalla frequenza, cioè tutti i segnali in ingresso vengono traslati in uscita allo stesso modo

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



ESEMPIO

Dato $x[n] = \cos(2\pi F n + \phi)$ un segnale in ingresso ad un sistema LTI la cui risposta in frequenza è $H(F)$, determinare una funzione che esprima il ritardo

$$y[n] = |H(F)| \cos(2\pi F (n - n_0) + \phi) \quad \text{con } n_0 = \tau(F) = - \frac{\angle H(F)}{2\pi F}$$

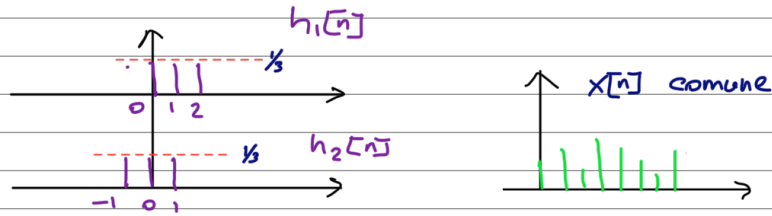
$$\begin{aligned}
 & \text{con } \angle H(F) = -2\pi k F \quad \text{dunque } \tau(F) = \frac{-2\pi k F}{2\pi F} = k \\
 & \quad \quad \quad \uparrow \text{è un sistema non} \quad \quad \quad \uparrow \text{indipendente da} \\
 & \quad \quad \quad \text{distorsione} \quad \quad \quad \text{F}
 \end{aligned}$$

CONCLUSIONI

TESTO

Siano $h_1[n]$ e $h_2[n]$ due risposte impulsive di altrettanti sistemi di media mobile di cui il primo centrato sull'ultimo campione mentre il secondo centrato nel campione intermedio.

SEGNALI



USCITA

$$y_1[n] = \frac{1}{3} [x[n] + x[n-1] + x[n-2]]$$

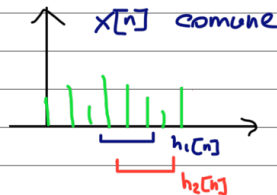
SISTEMA ANTICAUSALE

$$y_2[n] = \frac{1}{3} [x[n+1] + x[n] + x[n-1]]$$

parte non causale

OSSERVAZIONE

Come si vede confrontando le due sequenze $y_1[n]$ e $y_2[n]$ la prima può essere considerata in ritardo di un campione rispetto alla seconda. Inoltre osservando la figura seguente si intuisce che il sistema LTI è come se anticipasse l'elaborazione di un campione.



RISPOSTA IN FREQ.

$$H_1(F) = H_1(z) \Big|_{z=e^{-j2\pi F}} \quad \text{dalla definizione}$$

$$H_2(F) = H_2(z) \Big|_{z=e^{j2\pi F}} \quad \text{dalla definizione}$$

$$H_1(z) = \frac{1}{3} [1 + z^{-1} + z^{-2}] \Rightarrow H_1(F) = \frac{1}{3} [1 + e^{-j2\pi F} + e^{-j4\pi F}]$$

$$H_2(z) = \frac{1}{3} [z + 1 + z^{-1}] \Rightarrow H_2(F) = \frac{1}{3} [e^{j2\pi F} + 1 + e^{-j2\pi F}]$$

$$H_1(F) = \frac{1}{3} e^{-j2\pi F} [e^{j2\pi F} + 1 + e^{-j2\pi F}] =$$

$h_1[n]$ altera in ampiezza e fase $x[n]$

$$= \left[\frac{1}{3} \right] e^{-j2\pi F} [1 + 2\cos(2\pi F)] \Rightarrow \gamma_1(F) = -\frac{\angle H(F)}{2\pi F} = 1$$

$|H(F)|$ $\angle H(F)$

in modo analogo a $H_1(F)$ calcolo $H_2(F)$

$h_2[n]$ altera solo in ampiezza $x[n]$

$$H_2(F) = \left[\frac{1}{3} \right] [1 + \cos(2\pi F)] \Rightarrow \gamma_2(F) = -\frac{\angle H_2(F)}{2\pi F} = \frac{0}{2\pi F} = 0$$

CONCLUSIONI Il calcolo dei due ritardi in campioni coincide con l'osservazione e permette un sistema anticausale non introdotto dai ritardi.